BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2009

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА НА ВСЕЙ ОСИ

Аг.Х.ХАНМАМЕДОВ
Бакинский Государственный Университет
khanmamedov@yahoo.com

Рассматривается задача рассеяния для разностного уравнения Шредингера на оси с бесконечно убывающими коэффициентами в одну сторону. Получены необходимые и достаточные условия для однозначной разрешимости обратной задачи рассеяния.

В данной работе рассматривается разностное уравнение Шредингера на оси

$$a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1} = \lambda y_{n-1}, \qquad n \in Z, \tag{1}$$

в котором коэффициент b_n исчезает при $n \to \pm\infty$, а коэффициент a_n стабилизируется при $n \to -\infty$ к отличной от нуля постоянной и исчезает при $n \to +\infty$. В случае, когда a_n стремится на бесконечности к отличным от нуля пределам, обратная задача , т.е. задача восстановления коэффициентов a_n, b_n по данным рассеяния, была изучена в работах [1], [2].

При сделанных предположениях о коэффициентах, решением задачи рассеяния называется решение уравнения (1), которое определяется требованием убывания в области, где коэффициенты a_n, b_n бесконечно убывают , и асимптотикой (см. п.1) на непрерывном спектре

$$a^{-1}(\lambda)\psi_n(\lambda)` \sim z^n + r(\lambda)z^{-n}, \quad n \to -\infty, \quad r(\lambda) = \frac{\overline{a(\lambda)}}{a(\lambda)}.$$

Функцию $t(\lambda) = a^{-1}(\lambda)$ назовем коэффициентом удаления. Коэффициент удаления связан с коэффициентами a_n, b_n уравнения (1) посредством уравнения типа Марченко, как и в работах [1], [2]. К тому же, при решении обратной задачи не удалось сформулировать условия на коэффициент удаления, достаточные для того, чтобы построенные на основании уравнения типа Марченко коэффициенты a_n, b_n бесконечно убывали при $n \to +\infty$. Поэтому постановка задачи несколько расширена и условие роста при $n \to +\infty$ заменено требованием дискретности и ограниченности спектра разностного оператора Шредингера на положительной полуоси.

1. Будем считать, что вещественные коэффициенты a_n, b_n удовлетворяют следующим требованиям:

а) $a_n > 0,\ n \in Z,\quad \sum\limits_{n \le -1} |n| \{ |a_n - 1| + |b_n| \} < \infty;$ (2)

б) спектр оператора L_0, порожденного при $n \ge 0$ уравнением (1) и граничным условием $y_{-1} = 0,$ был дискретен и ограничен (для простоты, будем считать, что спектр оператора L_0 лежит в промежутке $[-2,2]$).

Пусть Γ - комплексная λ-плоскость с разрезом по отрезку $[-2,2]$. В плоскости Γ рассмотрим функцию

$$z = z(\lambda) = \frac{\lambda}{2} + \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - 1},$$

где регулярная ветвь радикала выбирается из условия $\sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - 1} < 0$ при $\lambda > 2$. Как следует из $[2]$, уравнение (1) имеет решение $f_n(\lambda)$, представимое в виде

$$f_n(\lambda) = \alpha_n z^{-n} \left(1 + \sum_{m=-\infty}^{-1} A_{nm} z^{-m} \right), \quad n \in Z, \tag{3}$$

причем вещественные величины $\alpha_n > 0,\ A_{nm}$ связаны с коэффициентами a_n, b_n посредством формул

$$a_n = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}, \quad b_n = A_{n,-1} - A_{n+1,-1}. \tag{4}$$

Введем в рассмотрение решения $P_n(\lambda)$ и $Q_n(\lambda)$ уравнения (1) с начальными условиями $P_{-1}(\lambda) = 0,\ P_0(\lambda) = 1,\ Q_0(\lambda) = 0,\ Q_1(\lambda) = \frac{1}{a_0}$. Дискретность спектра оператора L_0 гарантирует существование решения $\psi_n(\lambda)$, называемого решением Вейля и допускающего представление

$$\psi_n(\lambda) = Q_n(\lambda) + m(\lambda) P_n(\lambda). \tag{5}$$

Коэффициент $m(\lambda)$ называется функцией Вейля для уравнения (1). Функция Вейля и спектральная функция $\rho(\lambda)$ оператора L_0 связаны равенством

$$m(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho(t)}{t - \lambda}. \tag{6}$$

При выполнении условия **б)** функция $m(\lambda)$ является мероморфной функцией с простыми полюсами $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots,$ где $\lambda_n \in [-2,2]$.

Для всех $\lambda \in \partial\Gamma$ и $\lambda^2 \ne 2$ решения $f_n(\lambda)$ и $\overline{f_n(\lambda)}$ линейно независимы и $\psi_n(\lambda)$ переставляется в виде

$$\psi_n(\lambda) = a(\lambda)\overline{f_n(\lambda)} + \overline{a(\lambda)} f_n(\lambda) \quad . \tag{7}$$

Полагая $n = -1$ и $n = 0$ в последнем равенстве, получим

$$-\frac{1}{a_{-1}}=a(\lambda)\overline{f_{-1}(\lambda)}+\overline{a(\lambda)}f_{-1}(\lambda), \tag{8}$$

$$m(\lambda)=a(\lambda)\overline{f_0(\lambda)}+\overline{a(\lambda)}f_0(\lambda), \tag{9}$$

из которых следует, что

$$a(\lambda)=\frac{a_{-1}m(\lambda)f_{-1}(\lambda)+f_0(\lambda)}{z-z^{-1}}. \tag{10}$$

Из формул (3) и (10) вытекает следующее свойство коэффициента удаления $t(\lambda)=a^{-1}(\lambda)$:

I.Функция $t(\lambda)$ непрерывна при $\lambda\in\partial\Gamma$ и $t(\lambda-i0)=\overline{t(\lambda+i0)}$, $\lambda\in[-2,2]$. Эта функция имеет счетное число простых нулей, расположенных в промежутке $[-2,2]$, и допускает регулярное продолжение в плоскость Γ, за исключением, быть может конечного числа простых вещественных полюсов $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_N$. Справедливо соотношение $\lim\limits_{\lambda\to\infty}z(\lambda)t(\lambda)=1$.

Набор величин $\{t(\lambda),\ \lambda\in\partial\Gamma;\ \mu_k;\ m_k>0,\ k=1,\ldots,N\}$ назовем данными рассеяния для уравнения (1). Обратная задача рассеяния для уравнения (1) заключается в нахождении коэффициентов a_n,b_n по данным рассеяния.

Введем обозначения

$$m_k^2=\sum_{n\in z}f_n^2(\mu_k),\ k=1,\ldots,N,\ F_n=\sum_{k=1}^{N}m_k^{-2}z^{-n}(\mu_k)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Gamma}\frac{z^{-n}}{z-z^{-1}}\frac{t(\lambda)}{\overline{t(\lambda)}}d\lambda.$$

При решении обратной задачи важную роль играют соотношения

$$F_{2n+m}+A_{nm}+\sum_{k\le -1}A_{nk}F_{2n+m+k}=0,\ n\le 0,\ m\le -1, \tag{11}$$

$$\alpha_n^{-2}=1+F_{2n}+\sum_{k\le -1}A_{nk}F_{2n+k},\quad n\le 0, \tag{12}$$

которые выводятся при помощи (5). Соотношение (11) назовем уравнением типа Марченко. На основании (11) устанавливается следующее свойство:

II. Имеет место оценка

$$\sum_{n\le -1}|n||F_{n+2}-F_n|<\infty.$$

Теперь найдем связь спектральной функции оператора L_0 с коэффициентом удаления $t(\lambda)=a^{-1}(\lambda)$. Для этого используем (8), (9) и формулу обращения Стильтьеса-Перрона (см.[3]). В результате придем к свойству.

***III.** Пусть $m(\lambda)$ определяется формулами (8), (9), где $f_n(\lambda)$ строится согласно (3) по решению A_{nm} уравнения (11). Тогда функция $\rho(\lambda)=\frac{1}{\pi}\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\lambda}\operatorname{Im}m(\tau+i\varepsilon)d\tau$ является спектральной функцией для некоторого разностного оператора Шредингера на полуоси $n\ge 0$ с нулевым граничным условием $y_{-1}=0$.*

2. После некоторой переформулировки перечисленные выше необходи-

мые свойства становятся и достаточными для того, чтобы обладающий ими набор $\{t(\lambda), \quad \mu_k; m_k, \ k=1,...,N\}$ являлся данными рассеяния уравнения (1) с коэффициентами, удовлетворяющими требованиям **а)** и **б)**.

Теорема. Для того, чтобы набор величин $\{t(\lambda), \lambda \in \partial\Gamma; \mu_k; m_k > 0, k=1,...,N\}$ являлся данными рассеяния некоторого уравнения (1), коэффициенты которого удовлетворяют требованиям **а)** и **б)**, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия I-III.

При выполнении условий I-III обратная задача рассеяния решается следующим образом. Условия I-II обеспечивают однозначную разрешимость уравнения (10). По его решению согласно (3) строим $f_n(\lambda)$, которое является решением уравнения вида (1) с коэффициентами $a_n, b_n, n < 0$, определяемыми формулами (4). С помощью условия III находим спектральную функцию $\rho(\lambda)$. В силу условий I-III спектральная мера $d\rho(\lambda)$ сосредоточена в нулях коэффициента удаления $t(\lambda)$. Решая обратную задачу по спектральной мере $d\rho(\lambda)$ (см. $[4]$), найдем a_n, b_n при $n \geq 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Манаков С.В. О полной интегрируемости и стохастизации в дискретных динамических системах // Журн. эксперим. и теор. физ., 1974, т. 67, № 2, с. 543-555.
2. Гусейнов И.М., Ханмамедов Аг.Х.. Асимптотика при $t \to \infty$ задачи Коши для цепочки Тоды с начальными данными типа ступеньки // Теор. и матем. физ., 1999, т. 119, № 3, с. 429-440.
3. Ахиезер Н.И. Классическая проблема моментов. М.: ГИФМЛ, 1961, 310 с.
4. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова Думка, 1965, 798 с.

ŞREDİNGERİN BÜTÜN OXDA FƏRQ TƏNLİYİ ÜÇÜN SƏPİLMƏNİN TƏRS MƏSƏLƏSİ

Aq.X.XANMƏMMƏDOV

XÜLASƏ

Bütün oxda Şredingerin fərq tənliyi üçün səpilmə məsələsinə baxılır, belə ki, əmsallar bir tərəfdə sonsuz kiçikdir. Səpilmənin tərs məsələsinin birqiymətli həll olunması üçün zəruri və kafi şərtlər tapılmışdır.

INVERSE SCATTERING PROBLEM FOR SCHRÖDINGER DIFFERENTIAL EQUATION ON WHOLE AXIS

Ag.Kh.KHANMAMEDOV

SUMMARY

The article studies scattering problem for Schrödinger differential equation on whole axis with coefficients decreasing on the right semi axis. Necessary and sufficient conditions for the unique solvability of the inverse scattering problem are obtained.